PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

SEPTIEMBRE - 2008

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

La prueba consta de cuatro bloques con dos opciones cada uno. Debes contestar una única opción de cada bloque. Todas las opciones puntúan igual. Puedes usar cualquier tipo de calculadora.

PRIMER BLOQUE

1º-A) Dadas las funciones $f(x) = L(1-x^2)$ y $g(x) = L(1+x^2)$, se pide:

a) Determina el dominio de cada una de ellas.

b) Estudia si dichas funciones tienen puntos de inflexión.

----

a)

Teniendo en cuenta que el dominio de la función $f(x) = Lx$ es $(0,\ +\infty)$, los dominios son los siguientes:

$$D(f) \Rightarrow \left|1-x^2\right| > 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D(f) \Rightarrow (-1,\ 1)}}$$

$$D(g) \Rightarrow \left|1+x^2\right| > 0 \ \ \forall x \in R \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D(g) \Rightarrow (-\infty,\ +\infty)}}$$

b)

Una función tiene punto de inflexión para los valores que anulan la segunda derivada y hacen distinto de cero a la tercera derivada.

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} = 0 \ \Rightarrow \ \underline{x=0}$$

$$f''(x) = \frac{-2\cdot(1-x^2)-(-2x)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{-2+2x^2-4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{-2-2x^2}{(1-x^2)^2} = \underline{\frac{-2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} = f''(x)}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{-2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}=0 \;;;\; 1+x^2=0 \Rightarrow x \notin R \Rightarrow$$ <u>f(x) no tiene puntos de inflexión.</u>

$$g'(x)=\frac{2x}{1+x^2}=0 \Rightarrow \underline{x=0}$$

$$g''(x)=\frac{2\cdot(1+x^2)-2x\cdot(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\underline{\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=g''(x)}$$

$$g''(x)=0 \Rightarrow \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=0 \;;;\; 1-x^2=0 \Rightarrow \underline{x_1=-1} \;;;\; \underline{x_2=1}.$$

$$g'''(x)=\frac{-4x\cdot(1+x^2)^2-2\cdot(1-x^2)\cdot 2\cdot(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=\frac{-4x\cdot(1+x^2)-8x\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)^3}=$$

$$=\frac{-4x-4x^3-8x+8x^3}{(1+x^2)^3}=\frac{4x^3-12x}{(1+x^2)^3}=\underline{\frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}=g'''(x)}.$$

$$g'''(\pm 1)\neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{La\ \ función\ \ g(x)=L(1+x^2)\ tiene\ \ P.\ I.\ \ para\ \ x=-1\ \ y\ \ para\ \ x=1}}.$$

****

1º-B) Determina los valores de los parámetros $a,\ b \in R$ para que la función $f(x) = (ax^2 + bx)e^{-x}$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa x = 3 y además pase por el punto $P\left(1,\ \frac{1}{e}\right)$. Halla la ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto de abscisa x = 0.

Para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es necesario que se anule su primera derivada y sea distinta de cero su segunda derivada para el valor que anula la primera.

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2ax+b) \cdot e^x - (ax^2 + bx) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2ax + b - ax^2 - bx}{e^x} =$$

$$= \underline{\frac{-ax^2 + (2a-b)x + b}{e^x} = f'(x)}$$

$$f'(3) = 0 \Rightarrow \frac{-a \cdot 3^2 + (2a-b) \cdot 3 + b}{e^3} = 0 \ ;; \ -9a + 6a - 3b + b = 0 \ ;; \ -3a - 2b = 0 \ ;;$$

$$\underline{3a + 2b = 0} \qquad (1)$$

Como la función pasa por el punto $P\left(1,\ \frac{1}{e}\right)$ tiene que satisfacer la ecuación:

$$f(1) = \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{a \cdot 1^2 + b \cdot 1}{e^1} = \frac{1}{e} \Rightarrow \underline{a + b = 1} \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por (1) y (2) obtenemos los valores de a y b:

$$\left.\begin{array}{r} 3a + 2b = 0 \\ a + b = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3a + 2b = 0 \\ -2a - 2b = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{a = -2}} \ ;; \ a + b = 1 \ ;; \ -2 + b = 1 \ ;; \ \underline{\underline{b = 3}}$$

Para los valores obtenidos la función y su derivada resultan ser $f(x) = \frac{-x^2 + 3x}{e^x}$ y $f'(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{e^x}$.

La tangente a una función en un punto tiene como pendiente la derivada de la función en ese punto: $m = f'(0) = \frac{3}{e^0} = \frac{3}{1} = \underline{3 = m}$.

El punto de tangencia es: $f(0) = 0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)}$.

Sabiendo que la expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la fórmula: $y - y_0 = m(x - x_0)$:

Recta tangente t es: $y - 0 = 3(x - 0)$;; $y = 3x$;; $\underline{\underline{Tangente:\ t \equiv 3x - y = 0}}$

****

SEGUNDO BLOQUE

2º-A) De la función $f(x)=(a+x)\cdot sen\ x$, donde a es un número real, se sabe que la integral definida $I=\int_0^{\pi} f(x)\cdot dx$ es tres veces el valor de la pendiente de la recta tangente a f(x) en x = 0. Calcula el valor de a.

Vamos a determinar, en primer lugar, el valor de la pendiente.

La pendiente a una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto:

$$f'(x)=1\cdot sen\ x+(a+x)\cdot \cos\ x=sen\ x+(a+x)\cdot \cos\ x$$

$$m=f'(0)=sen\ 0+(a+0)\cdot \cos\ 0=0+a\ \cdot 1=\underline{a=m}$$

Ahora determinamos el valor de la integral indefinida, por el método de "por partes":

$$I=\int_0^{\pi} f(x)\cdot dx=\int_0^{\pi}(x+a)\cdot sen\ x\ \cdot dx\ \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x+a=u\ \rightarrow\ du=dx \\ sen\ x\ \cdot dx=dv\ \rightarrow\ v=-\cos\ x \end{matrix}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I=\left[(x+a)\cdot(-\cos\ x)-\int -\cos\ x\ \cdot dx\right]_0^{\pi}=\left[-(x+a)\cdot \cos\ x+\int \cos\ x\ \cdot dx\right]_0^{\pi}=$$

$$=\left[-(x+a)\cdot \cos\ x+sen\ x\right]_0^{\pi}=\left[-(\pi+a)\cdot \cos\ \pi+sen\ \pi\right]-\left[-(0+a)\cdot \cos\ 0+sen\ 0\right]=$$

$$=-(\pi+a)\cdot(-1)+0-(-a\ \cdot 1+0)=\pi+a+a=\underline{\pi+2a=I}$$

Como el valor de la integral es tres veces el valor de la pendiente, tiene que ser:

$$\pi+2a=3\cdot a\ \ ;;\ \ \underline{\underline{a=\pi}}$$

****

2º-B) Definición de primitiva de una función. Sabiendo que $F(x)=e^{x^2}$ es una primitiva de la función f(x):

a) Comprueba que f(x) es un función creciente en R.

b) Calcula el área determinada por la gráfica de f(x), el eje de abscisas, y las rectas $x=-1$ y x = 1.

La función F(x) es una función primitiva de la función f(x) en el intervalo cerrado $[a,\ b]$, cuando $F'(x)= f(x),\ \ \forall x\in [a,\ b]$.

Si F(x) es una función primitiva de f(x) y C es una constante, la función $F(x)+C$ también es una primitiva de f(x), lo cual significa que una función tiene infinitas funciones primitivas, todas aquellas que se diferencian en una constante de f(x).

a)

$$f(x)=F'(x)=2x\cdot e^{x^2}.$$

Una función es creciente cuando su derivada es positiva:

$$f'(x)= 2\cdot\left(1\cdot e^{x^2}+x\cdot 2x\cdot e^{x^2}\right)=\underline{2e^{x^2}\left(1+2x^2\right)= f'(x)}$$

Como quiera que $e^{x^2}>0,\ \forall x\in R$ y $\left(1+2x^2\right)>0,\ \forall x\in R$, tiene que ser:

$$f'(x)=2e^{x^2}\left(1+2x^2\right)>0\Rightarrow \underline{\underline{f(x)\ \ es\ \ creciente,\ \forall x\in R,\quad c.q.c.}}$$

b)

Como quiera que f(x) es simétrica con respecto al origen, por ser $f(x)=-f(-x)$, el valor del área pedida es la siguiente:

$$S=\int_{-1}^{1} f(x)\cdot dx=[F(x)]_{-1}^{1}=2\cdot[F(x)]_{0}^{1}=2\cdot\left[e^{x^2}\right]_{0}^{1}=2\cdot\left(e^1-e^0\right)=\underline{\underline{2(e-1)\ u^2=S}}$$

****

TERCER BLOQUE

3º-A) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} = 6$, calcular el valor de $\begin{vmatrix} \frac{z}{2} & z+7 & 3 \\ \frac{y}{2} & y & 3 \\ \frac{x}{2} & x-3 & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} \frac{z}{2} & z+7 & 3 \\ \frac{y}{2} & y & 3 \\ \frac{x}{2} & x-3 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \frac{x}{2} & x-3 & 3 \\ \frac{y}{2} & y & 3 \\ \frac{z}{2} & z+7 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} x & x-3 & 1 \\ y & y & 1 \\ z & z+7 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \cdot \left\{ \begin{vmatrix} x & x & 1 \\ y & y & 1 \\ z & z & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \{0+6\} = \underline{\underline{-9}}$$

<u>Nota</u>: Se han utilizado, sucesivamente, las siguientes propiedades de los determinantes:

1.- Si los elementos de una línea se dividen o multiplican por un número, el valor del determinante queda dividido o multiplicado por dicho número.

2.- Si se cambian dos líneas de un determinante entre si, el valor del determinante cambia de signo.

3.- Si los elementos de una línea de un determinante son suma de dos números, el valor del determinante es igual a la suma de los valores de los determinantes que tienen en esa línea el primero y segundo sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que el determinante inicia.

4.- Si un determinante tiene dos líneas proporcionales (iguales), el valor del determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 1 \\ y & 0 & 1 & 1 \\ z & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_4 \to C_4 - C_3\} \Rightarrow 2 \cdot \begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 6 = \underline{\underline{12}}$$

****

3º-B) Clasifica el sistema $\begin{cases} x-2y+az=0 \\ -ay+2z=0 \\ 2x-y+(a+1)z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ en función del parámetro $a\in R$, y resuélvelo para a = -2.

Se trata de un sistema lineal homogéneo de cuatro ecuaciones con tres incógnitas.

La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & -a & 2 \\ 2 & -1 & a+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes, en función de a, es el siguiente:

$$Rango\ \ M \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{F_1,\ F_2,\ F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & -a & 2 \\ 2 & -1 & a+1 \end{vmatrix} = -a^2-a-8+2a^2+2=a^2-a-6=0 \\ \\ \{F_1,\ F_2,\ F_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & -a & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a-4+a^2-2=a^2-a-6=0 \\ \\ \{F_2,\ F_3,\ F_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -a & 2 \\ 2 & -1 & a+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4-a^2-a+2+2a=-a^2+a+6=0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a^2-a-6=0\ \ ;;\ \ a=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}\ \Rightarrow\ \underline{a_1=3}\ ;;\ \underline{a_2=-2}$$

$$\underline{\underline{Para\ \left\{\begin{array}{c} a\neq 3 \\ a\neq -2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ Rango\ \ M=3=n^o\ \ incóg.\ \Rightarrow\ Compatible\ \ Determinado}}$$

(Solución trivial x = y = z = 0)

$$\underline{\underline{Para\ \left\{\begin{array}{c} a=3 \\ a=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ Rango\ \ M=2<n^o\ \ incóg.\ \Rightarrow\ Compatible\ \ Indeterminado}}$$

Para a = -2 el sistema es $\begin{cases} x-2y-2z=0 \\ 2y+2z=0 \\ 2x-y-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$. Para resolverlo despreciamos dos de las ecuaciones, por ejemplo las dos primeras, y parametrizamos una de las incógnitas, por ejemplo z:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y-z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y=\lambda \\ x+y=-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=0 \;;;\; \underline{x=0} \;;;\; \underline{y=-\lambda}$$

$$\underline{\underline{Solución:\ \begin{cases} x=0 \\ y=-\lambda, \quad \forall \lambda \in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

CUARTO BLOQUE

4º-A) Dados el plano $\pi \equiv x - y + z + k = 0$, donde $k \in R$, y la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = y + 1 = -z$, se pide:

a) Demuestra que para cualquier $k \in R$, la recta r es paralela al plano π.

b) Determina el valor de $k \in R$ de forma que la recta r esté contenida en el plano π.

----

a)

La expresión de r es $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ y su vector director es $\overrightarrow{v} = (2,\ 1,\ -1)$.

El vector normal del plano es $\overrightarrow{n} = (1,\ -1,\ 1)$.

Para que la recta y el plano sean paralelos es necesario que los vectores $\overrightarrow{v} = (2,\ 1,\ -1)$ y $\overrightarrow{n} = (1,\ -1,\ 1)$ sean perpendiculares, o sea, que su producto escalar sea cero:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = (2,\ 1,\ -1) \cdot (1,\ -1,\ 1) = 2 - 1 - 1 = 0 \ \Rightarrow \ \underline{\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{n}}$$

$$\underline{\underline{En \ \ efecto: \ la \ \ recta \ \ r \ \ y \ \ el \ \ plano \ \ \pi \ \ son \ \ paralelos \ \ \forall k \in R, \ \ c.q.d.}}$$

b)

Para que la recta r esté contenida en el plano π es necesario que contenga a todos sus puntos, por ejemplo al punto P(3, -1, 0)$\in$ r:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - y + z + k = 0 \\ P(3,\ -1,\ 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \ 3 - (-1) + 0 + k = 0 \ \ ;; \ \ 3 + 1 + k = 0 \ \ ;; \ \ \underline{\underline{k = -4}}$$

****

4º-B) Dado el punto P(2, 2, 1) y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 1 - t + s \\ z = t \end{cases}$, se pide:

a) La distancia desde el punto P(2, 2, 1) al plano π.

b) Las ecuaciones generales de la recta r que pasa por P(2, 2, 1) y es perpendicular a π.

----

a)

La distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0)$ al plano genérico $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula: $d(P_0,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

La expresión general del plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 1 - t + s \\ z = t \end{cases}$ es la siguiente:

Dos vectores directores de π son $\overrightarrow{u} = (1,\ -1,\ 1)$ y $\overrightarrow{v} = (1,\ 1,\ 0)$ y un punto perteneciente a dicho plano es P(1, 1, 0).

$$\pi(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ z + (y-1) + z - (x-1) = 0 \ ;;\ -x - 1 + y - 1 + 2z = 0 \ ;;$$

$$-x + y + 2z - 2 = 0 \ ;;\ \underline{\pi \equiv x - y - 2z + 2 = 0}$$

Aplicando la formula al plano $\pi \equiv x - y - 2z + 2 = 0$ y al punto P(1, 1, 0):

$$d(P,\ \pi) = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|1 - 1 - 0 + 2|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{3}\ unidades = d(P,\ \pi)}}$$

b)

La recta r pedida tiene como vector director a cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector normal del plano.

El plano $\pi \equiv x - y - 2z + 2 = 0$ tiene como vector normal a $\overrightarrow{n} = (1,\ -1,\ -2)$.

La recta r, dada por unas ecuaciones continuas es $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-2}$ y por unas ecuaciones generales o implícitas, como se nos pide es:

$$\begin{cases} -x + 2 = y - 2 \\ 2y - 4 = z - 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2y - z - 3 = 0 \end{cases}}}$$

****